

# ANALYSE NON-LINÉAIRE DES STRUCTURES PLANES

## 1 Introduction

### 1.1 Réponse élastique des structures

La réponse en mécanique des solides d'un système à un chargement donné est non-linéaire même si ce dernier est élastique.

L'analyse linéaire n'est en fait qu'une approximation qui reste valable seulement si les déformations sont relativement petites et les propriétés constitutives du matériau linéaire.

La réponse réelle d'un système est en générale non-linéaire, de forme souple ou rigide (voir Figure 1).

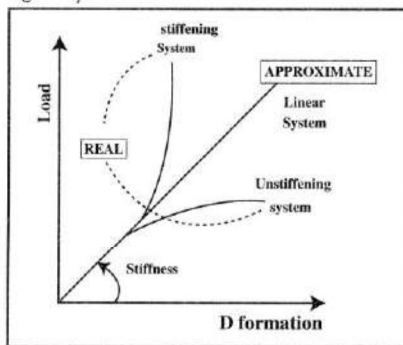


Figure 1 : Elastic structural system responses

Alors que les systèmes rigides ne sont pas économiques, les systèmes souples par contre sont susceptibles à la ruine si les problèmes d'instabilité ne sont pas pris en considération par l'ingénieur concepteur.

### 1.2 Analyse linéaire de la stabilité ou analyse du 2<sup>ème</sup> ordre

Il est devenu évident, surtout après les recommandations du règlement Américain de Charpente Métallique (AISC) 1986, que la résolution des problèmes de stabilité ne se limitait plus à la détermination de la charge critique mais devait s'étendre à la construction de la courbe chargement-déplacement de la structure donnée.

La résolution correcte d'un problème de stabilité nécessite la prise en considération des chan-

gements de géométrie. Dans ce cas précis, les équations d'équilibre doivent être formulées par rapport à la géométrie déformée de l'élément ou de la structure considérée. Ceci est communément appelé analyse du 2<sup>ème</sup> ordre.

## 2 Formulation de l'équation force déplacement

### 2.1 Hypothèses

- Ne sera considérée, uniquement, la non-linéarité géométrique
- La loi de comportement du matériau sera assumée être linéaire élastique.
- Les déformations seront assumées être petites mais les déplacements grands.

### 2.2 Dérivation de l'équation non-linéaire déformation-déplacement

Considérons un élément prismatique à section constante soumis à un chargement uniformément réparti  $q$  agissant perpendiculairement à l'axe de la poutre (figure 2 ci-dessous).

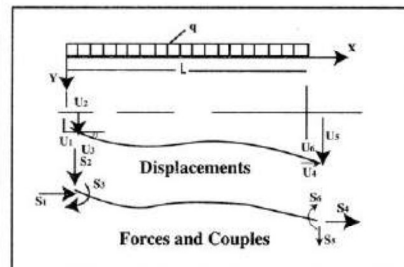


Figure 2 : Notation for displacements and forces

Si on néglige les déformations dues à l'effort tranchant, les déformations longitudinales et de flexion à la section droite de la poutre seront décrites par l'équation déformation-déplacement suivante :

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} - y \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \quad (2.1)$$

Le premier et le second terme sont les déformations longitudinales et de flexion ; le troi-

A. BENOUCHEF  
E.N.T.P ALGER

## RÉSUMÉ

L'objectif du présent article est de présenter l'extension d'un programme d'analyse linéaire des structures planes (1<sup>er</sup> ordre) en un programme d'analyse non-linéaire (2<sup>ème</sup> ordre).

L'étude est limitée aux structures présentant une non-linéarité géométrique. L'élément considéré dans la méthode de calcul par éléments finis est l'élément poutre, le matériau est, quand à lui, supposé élastique et les déplacements grands.

Le programme obtenu est capable d'analyser les problèmes d'instabilité des structures planes et ceci en traçant leurs courbes chargement-déplacement jusqu'au point limite avec la détermination de la charge critique.

Pour la fiabilité et validité du programme, deux types de structures planes présentant un degré de non-linéarité prononcée ont été étudiés et leur résultats comparés.

## MOTS CLÉS

Instabilité • Analyse non-linéaire • Non-linéarité géométrique • grands déplacements • Analyse du 2<sup>ème</sup> ordre.

sième terme est non-linéaire en v et représente une composante en déformation associée au couplage entre l'allongement et la flexion.

**2.3 Dérivation de la matrice géométrique**

L'énergie de déformation de notre élément poutre est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int \epsilon_{xx}^2 dv \tag{2.2}$$

Par substitution de l'équation 2.1 dans l'équation 2.2 on obtient :

$$U_i = \iint \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + y^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 2y \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right. \\ \left. \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - y \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] EdAdx \tag{2.3}$$

En posant :  $\int dA = A$ ,  $\int ydA = 0$  et  $\int y^2 dA = I$

En intégrant suivant l'épaisseur de la section de l'élément qui est doublement symétrique :

$$U_i = \frac{1}{2} \int \left[ A \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + I \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + A \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{A}{4} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] Edx \tag{2.4}$$

Les déplacements transversaux relatifs aux déformations  $u_2, u_3, u_5, u_6$  (voir figure 2 ci-dessus) peuvent être représentées avec une précision suffisante en utilisant la fonction d'interpolation d'ordre cubique suivante :

$$v = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

les déplacements longitudinaux relatifs aux déformations  $u_1, u_4$  par contre seront représentés avec la fonction d'interpolation suivante :

$$u = \alpha + \beta x$$

Pour que ces fonctions d'interpolation s'articulent avec les déplacements, elles doivent vérifier les conditions aux limites de telle sorte qu'on obtienne :

$$v = (2u_2 - 2u_5 + lu_3 + lu_6) \left( \frac{x}{l} \right)^3 \\ + (-3u_2 + 3u_5 - 2lu_3 - lu_6) \left( \frac{x}{l} \right)^2 + u_3 x + u_2 \tag{2.5}$$

en posant  $\hat{x} = \frac{x}{l}$

On peut écrire la distribution du déplacement

sur la poutre qui sera donné par :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\hat{x} & 6\hat{x}(1-\hat{x}^2) & (1-4\hat{x}+3\hat{x}^2) & \hat{x} & 6\hat{x}(1-\hat{x}^2) & (21-3\hat{x}^2) \\ 0 & 1-3\hat{x}^2+2\hat{x}^3 & 1-3\hat{x}^2+2\hat{x}^3 & 0 & 3\hat{x}^2-2\hat{x}^3 & (-1^2+\hat{x}^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

A partir de l'équation 2.7, on déduit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{l} (-u_1 + u_4) \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{l} [6(-1+\hat{x}^2)u_2 + (1-4\hat{x}+3\hat{x}^2)u_3 + 6(1-\hat{x}^2)u_4 + (-21+3\hat{x}^2)u_6] \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{l^2} [6(-1+2\hat{x})u_2 + 2(-2+3\hat{x})u_3 + 6(1-2\hat{x})u_4 + 2(-1+3\hat{x})u_6] \tag{2.10}$$

La substitution des équations (2.8), (2.9) et (2.10) dans l'équation (2.4) et en intégrant, on obtient :

$$U_i = \frac{EA}{2l} (u_1^2 - 2u_1 u_4 + u_4^2) + \frac{2EI}{l^3} (3u_2^2 + l^2 u_3^2 + 3u_5^2 \\ + l^2 u_6^2 + 3l u_2 u_3 - 6u_2 u_5 + 3l u_2 u_6 - 3l u_3 u_5 + l^2 u_3 u_6) \\ + \frac{EA}{l^2} (u_4 - u_1) \left( \frac{3}{5} u_2^2 + \frac{1}{15} l^2 u_3^2 + \frac{3}{5} u_5^2 + \frac{1}{15} l^2 u_6^2 \right) \\ + \frac{1}{10} l u_2 u_3 - \frac{6}{5} u_2 u_5 + \frac{1}{10} l u_2 u_6 \tag{2.11}$$

En appliquant le théorème de Castigliano (Part I) à l'expression de l'énergie de déformation de l'équation (8) nous obtiendrons l'équation force-déplacement pour l'élément poutre.

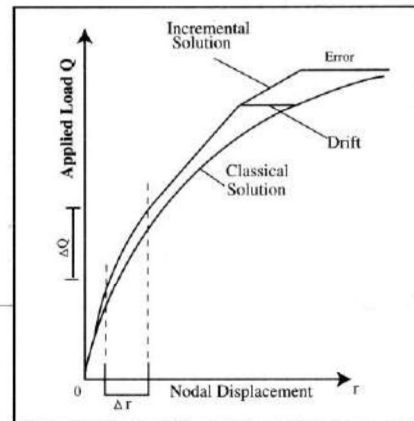
$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & & & & & \\ & 0 & 12 & & & \\ & 0 & 6l & 4l^2 & & \\ & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & \\ & 0 & -12 & -6l & 0 & 12 \\ & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15} l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{l^2}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$S = [K_E + K_G]$$

Où :  $K_E$  : représente la matrice de rigidité classique de l'élément poutre en flexion

Figure 3 : Drifting tendency in incremental stiffness procedure



$K_G$  : représente la matrice géométrique, elle introduit les effets d'instabilité élastique et exprime la diminution de la rigidité flexionnelle en présence d'une force de compression et de rigidification en présence d'une traction.

La matrice géométrique dépend elle-même de l'intensité  $P$ , donc elle représente une relation non-linéaire entre les forces  $S$  et les déplacements  $u$ .

Pour plus de détail sur cet aspect de la dérivation de la matrice géométrique le lecteur peut consulter les ouvrages de Bulson<sup>1</sup> et Chen<sup>2</sup>.

### 3 Schéma général de résolution d'un problème non-linéaire

Dans une analyse du second ordre, les équations d'équilibre doivent être formulées sur la nouvelle configuration de la structure déformée, qui n'est pas connue à l'avance et qui change constamment avec l'application du chargement. Il est donc indispensable de recourir à une procédure itérative afin d'obtenir la solution<sup>3</sup>.

Les trois procédures les plus utilisées pour la construction de la courbe chargement-déplacement des problèmes géométriquement non-linéaires sont : La méthode linéaire incrémentale, la méthode non-linéaire incrémentale et la méthode directe<sup>4,5</sup>.

#### 3.1 Méthode non-linéaire incrémentale

Nous avons adopté ici la méthode non-linéaire incrémentale car c'est l'une des techniques de résolution les plus utilisées d'une part, et à cause de sa facilité d'implémentation dans notre programme de calcul, d'autre part.

Dans cette méthode, la charge est divisée et appliquée d'une manière incrémentale. La configuration de la structure à la fin de chaque cycle de calcul est utilisée comme base pour la formulation des équations d'équilibre pour le prochain cycle de calcul.

A cause du processus de linéarisation (voir figure 3) l'équilibre est enfreint et le chargement n'est plus équilibré par les efforts internes. La force résiduelle résultant de ce déséquilibre est rattachée au système et le processus répété jusqu'à équilibre.

#### 3.2 Modules implantés

Ayant déjà un programme d'analyse linéaire structure établi, une extension de celui-ci pour une analyse non-linéaire est grandement simplifiée à cause du maintien de la plus grande partie des modules linéaires<sup>6,7</sup>. Les principales procédures complémentaires implantées comprennent :

- 1) une procédure incrémentale
- 2) une procédure itérative

**La procédure incrémentale** permet la subdivision du chargement incrémental, la résolution du système d'équation pour le déplacement incrémental, la mise à jour de la nouvelle configuration de la structure après déformation et la construction de la courbe chargement-déplacement.

**La procédure itérative** permet quand à elle la correction du déséquilibre résultant entre les forces externes appliquées et les efforts internes résultants issue du processus de linéarisation. Un test de convergence est prescrit pour terminer l'itération pour un cycle de calcul donné.

#### 3.3 Sommaire de l'analyse nonlinéaire incrémentale

1. Discrétisation de la structure
2. Entrée du nombre d'incrément à performer, ainsi que la valeur de la charge incrémentale  $\Delta Q_i$ .
3. Formulation de la matrice de rigidité (classique plus géométrique) pour chaque élément. L'effort axial  $P$  est assigné la valeur zéro au premier incrément.
4. Assemblage de tous les éléments pour former la matrice de rigidité totale  $K = K_E + K_G$ .
5. Résoudre pour le vecteur déplacement incrémental.

$$[K_E + K_G]_i \Delta U_i = \Delta Q_i \quad 3.2.1$$

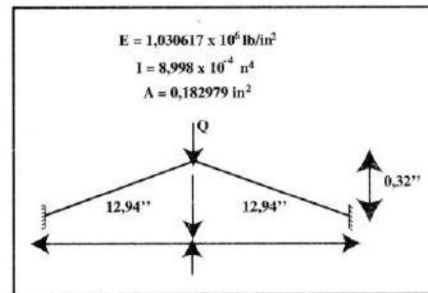
Ou :

$\Delta Q_i$  : vecteur charge incrémentale du 1er pas de charge.

$[K_E + K_G]_i$  : matrice de rigidité de la structure au début du pas de charge.

$\Delta U_i$  : déplacement incrémental nodal de la structure au 1er pas de charge.

Figure 4 : Shallow toggle with central load



6. Mise à jour du vecteur déplacement nodal à partir de :

$$U_i^1 = U_i + \Delta U_i^1 \quad (3.2.2)$$

ou :

$U_i^1$  : vecteur déplacement nodal de la structure à la fin du 1er cycle de calcul au 1er pas de chargement.

$U_i$  : vecteur déplacement nodal au début du 1er pas de chargement.

7. Extraire le vecteur déplacement  $u$  de chaque élément (repère local) à partir de  $U$  (repère global) pour chaque élément de la structure.

8. Pour chaque élément, évaluation de l'effort axial  $P$ .

9. Pour chaque élément évaluer les efforts internes.

10. Former le vecteur force interne de toute la structure à la fin du premier cycle de calcul en assemblant les efforts internes de chaque élément évalué en 9.

11. Calcul du vecteur force extérieure.

$$R_{i+1} = R_i + \Delta R_i \quad (3.2.3)$$

12. Evaluation de la force de déséquilibre ou résiduelle à la fin d'un cycle de calcul à partir

$$\Delta Q_i^1 = R_{i+1} - R_i^1 \quad (3.2.4)$$

13. Mise à jour de la matrice géométrique de chaque élément avec la nouvelle valeur de la force axiale, ensuite assemblage de tous les éléments de la structure pour former la matrice corrigée  $[K_E + K_G]_i^1$ . Enfin, évaluation du vecteur déplacement incrémental  $\Delta U$ .

$$\Delta U_i^2 = \left( [K_E + K_G]_i^1 \right)^{-1} \Delta Q_i^1 \quad (3.2.5)$$

14. Mise à jour du vecteur déplacement nodal de la structure (nouvelle configuration de la structure).

$\ddot{A}Q_i^1$  : la force résiduelle calculée dans le précédent cycle de calcul.

$$U_i^2 = U_i + \sum_{k=1}^2 \Delta U_i^k \quad (3.2.6)$$

15. Extraire le vecteur déplacement  $u$  de chaque élément  $U$  déterminé en 14.

16. Mise à jour des efforts internes calculés à partir des déplacements  $u$  de l'étape 15 ci-des-

sus et formation du nouveau vecteur force de toute la structure  $R$ .

17. évaluation de la nouvelle force résiduelle  $\Delta Q$  telle que :

$$\Delta Q_i^2 = R_{i+1} - R_i^2 \quad (3.2.7)$$

18. Répéter les pas de l'étape 13 jusqu'à 17 autant de fois que possible jusqu'à convergence. La convergence sera considérée comme étant atteinte quand la force résiduelle tombe entre les limites  $10^{-3}$  et  $10^{-6}$ .

19. Après convergence, le déplacement nodal de la structure à la fin du  $i$ ème pas de charge sera obtenu par :

$$U_{i+1} = U_i^n = U_i + \sum_{k=1}^n \Delta U_i^k \quad (3.2.8)$$

20. Prescrire un autre incrément de charge et répéter les pas de l'étape 2 jusqu'à 19.

#### 4 Étude de cas

Le test réel d'un programme de calcul quand à sa précision et sa consistance, réside dans son application à la résolution de problèmes pratiques. Ici deux exemples ont été choisis pour tester notre programme. Ce choix a été motivé : 1) par le degré de non-linéarité prononcée des systèmes en question et 2) par l'existence de résultats pour pouvoir faire la comparaison des résultats.

Il est à noter, dans ce qui suit, qu'en plus des considérations du changement de la géométrie et de l'effet des efforts normaux sur la réduction de la rigidité flexionnelle, l'influence du raccourcissement de la ligne moyenne sous l'action de l'effort normal de compression est prise en considération dans l'analyse présente.

##### 4.1 Cas de la structure de Williams

Cet exemple (voir Figure 4) est très intéressant, car il peut exhiber des comportements complexes (*snap through*) en jouant sur le rapport entre la distance à la clef et la distance à mi-travée. Il a fait l'objet d'études par de nombreux auteurs 8, 9.

Le modèle expérimental est constitué de deux barres reliées au sommet, elles sont encastées d'un côté et libres de l'autre. Le matériau consti-

tuant le système est en alliage d'aluminium, et la section transversale est de forme rectangulaire. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans la Figure 4.

#### Stratégie adoptée pour la résolution

Conformément à ce qu'a commenté Bergan<sup>10</sup> à savoir qu'il est «extrêmement difficile, si ce n'est impossible, de développer une méthode unique pour la résolution des problèmes non-linéaires» ajouter à cela l'autre commentaire de Fellip<sup>7</sup> à savoir que «Souvent, on doit performer des dizaines, voire des centaines de passages sur machine avant d'atteindre une solution satisfaisante». Partant de ces deux constats, il devient assez clair qu'il faut adopter une stratégie, afin de diminuer la complexité dans la résolution des problèmes de grandes non-linéarités. La stratégie adoptée ici a consisté à faire :

- varier le pas de chargement.
- varier le nombre de discrétisations des éléments.
- des analyses incrémentales avec et sans itérations.

Vu la symétrie du système, uniquement la moitié de la structure a été analysée. Une discrétisation à 2, 3 et 4 éléments a été faite et des pas de charges variant de 0.25 à 10.5lb ont été appliqués au système.

#### 4.2 Cas de l'arc

Ce deuxième exemple a été choisi également pour son degré de non-linéarité prononcé et complexe (*snap through*). Il a été analysé extensivement par Meek et al<sup>9</sup>.

Cet exemple est un arc de profil sinusoïdal chargé à son sommet et dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données dans la Figure 5.

La même stratégie que celle utilisée pour la structure de Williams a été adoptée, de même pour la discrétisation. Des pas de charges de 50 à 950lb ont été, par contre, utilisées.

#### 4.3 Résultats

Un ensemble de résultats sous forme graphique est présenté dans les pages suivantes.

De la figure 6 à la figure 8, sont montrées les courbes chargement-déplacement des résultats

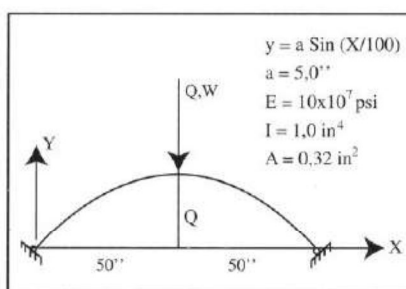


Figure 5 : Shallow arch

numériques comparés au résultat expérimental à la clef concernant la structure de Williams.

D'après les courbes, on peut constater la bonne concordance des résultats, jusqu'au point limite et, exceptionnellement dans la Figure 8, au delà du point limite.

Des résultats aussi bons ont été obtenus pour le deuxième exemple, bien que ce dernier a été approché par des éléments de poutre au lieu d'éléments d'arcs (voir figures 9 et 10).

Il a été constaté, à travers l'étude des deux exemples précédents que :

- Le choix du pas de charge avait une influence sur le résultat.
- La précision augmentait avec la discrétisation.
- L'application de la procédure itérative améliorait la convergence de la courbe chargement-déplacement.

#### 5 conclusion

Un programme de calcul non-linéaire incrémental a été obtenu après implantation de deux procédures et quelques modifications au niveau de certaines sous-routines dans un programme d'analyse linéaire.

Ce dernier s'est avéré être capable de tracer la courbe chargement-déplacement de deux structures possédant un degré de non-linéarité prononcée jusqu'au point limite. Il permet de lire également la charge critique sur la courbe chargement-déplacement.

La structure du programme développé a été conçue de façon modulaire, afin de permettre son éventuelle extension future. ■



**Bibliographie**

- [1] H.G. Allen and P.S. Bulson, *Background to buckling*, Mac Graw Hill, (1980).
- [2] W.F. Chen and E.M. Lui, *Structural stability, Theory and implementation*, Elsevier, (1987).
- [3] G.H. Powell, *Theory of non-linear elastic structures*, Journal of the structural division, ASCE Vol.95, (1969).
- [4] A. Chajes and J.E. Churchill, *Non-linear frame analysis by finite element methods*, Journal of the structural division, ASCE, Vol.113, (1987).
- [5] A.M. Ebner and J.J. Ucciferro, *A theoretical and numerical comparison of elastic non-linear finite element methods*, Computers & Structures, Vol.2, (1972).
- [6] J. Argyris et al, *Implantation of a non-linear capability on a linear software system*, Comp. Meth. In Appl. Mech. And Engng, Vol 65, (1987).
- [7] C.A. Felippa, *Procedures for computer analysis of large non-linear structural systems*, Proc. Int. Symp. On large Engineering systems. Edited by A. Wexler. Univ. Manitoba, Pergamon Press, (1977).
- [8] A. Jennings, *frame analysis including change in geometry*, Journal of the structural division, ASCE, Vol.94, (1968).
- [9] J.L. Meek and H.S. Tan, *Geometrically non-linear analysis of space frames by incremental iterative technique*. Comput. Meth. Appl. Mech. Engng 47, (1984).
- [10] P.G. Bergan et al, *Solution techniques for non-linear finite element problems*. Intern. Jour. For Num. Meth. In Engineering, Vol.12, (1978).

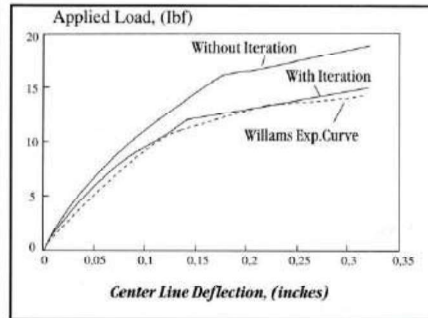


Figure 6 : Load deflection curve for 2 elem/half Toggle ( $\pm$  iteration)

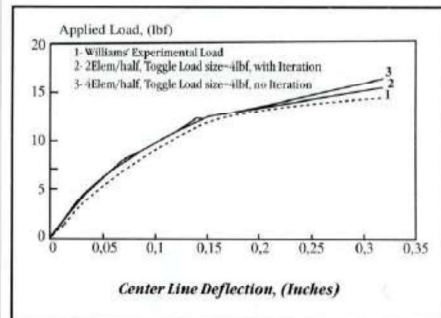


Figure 7 : Best load deflection curves as against Williams experimental one

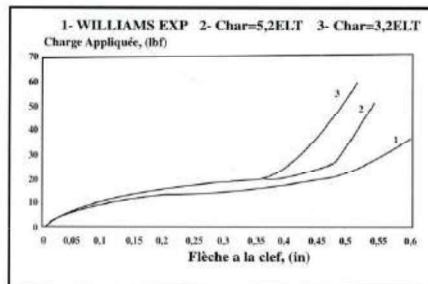


Figure 8 : Courbe Chargement - Flèche. Analyse limite

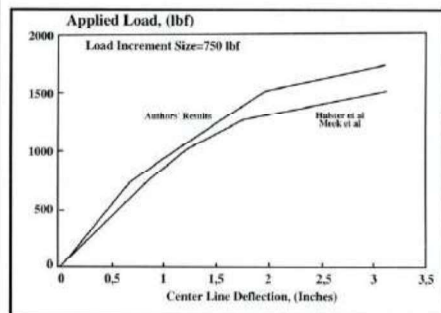


Figure 10 : Courbe chargement - Flèche modélisation 3 éléments. Incrémentation sans itérations. Cas de l'arc

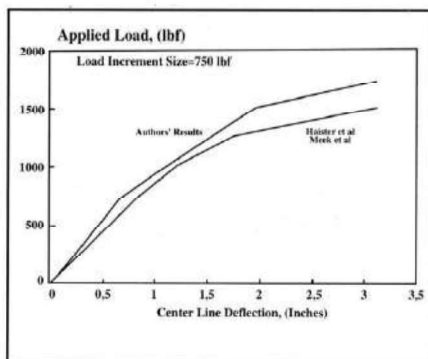


Figure 9 : Load deflection curve for 2 elem./half shallow arch